

Problema I (10 puncte)

Pe pârtie

GPS (Global Positioning System) este denumirea folosită pentru un dispozitiv care, măsurând timpii la care înregistrează semnalele provenite de la sateliți dedicați, își determină poziția și viteza de deplasare.

Octavian folosește caracteristicile aplicației GPS de pe telefonul său, pentru a-și monitoriza plimbarea cu un snowmobil pe o pârtie plană. El reglează aplicația GPS astfel încât telefonul să înregistreze valorile vitezei snowmobilului la diferite momente de timp.

Pârtia pe care se deplasează Octavian este înclinată cu unghiul $\alpha = 5,8^\circ$ față de un plan orizontal.

Octavian pornește cu snowmobilul din repaus și urcă în vârful pantei, unde ajunge exact în momentul în care viteza lui față de zăpada de pe pârtie este din nou nulă. Pe o anumită porțiune a drumului Octavian menține constantă forța de tracțiune a motorului snowmobilului, iar pe o altă porțiune urcă pe pârtie cu motorul oprit. Pe toată durata deplasării, traiectoria este rectilinie. Datele înregistrate cu ajutorul aplicației GPS de pe telefonul lui Octavian sunt prezentate în tabelul 1.



Tabelul 1

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0,0	12	6,5	24	15,5	36	8,0
2	0,2	14	8,0	26	17,0	38	4,0
4	0,5	16	9,5	28	18,5	40	0,0
6	1,8	18	11,0	30	20,0		
8	3,5	20	12,5	32	16,0		
10	5,0	22	14,0	34	12,0		

Masa snowmobilului este $M = 120\text{ kg}$, masa lui Octavian este $m = 80\text{ kg}$, iar accelerația gravitațională are valoarea $g = 10\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Într-o modelare simplă, presupune că pe toată durata mișcării, coeficientul μ de frecare la alunecare a snowmobilului pe zăpadă are aceeași valoare. Efectuează calculele cu precizia pe care o consideri adecvată, dar exprimă toate rezultatele numerice în unități SI, folosind numere reale cu o zecimală.

Dacă îți este util, ține seama că $1\text{ rad} = 57,29^\circ$ și că, pentru unghiuri mult mai mici decât un radian, $\sin \alpha \cong \alpha$ și $\cos \alpha \cong 1$, unde unghiului α este exprimat în radiani.

Sarcina de lucru nr. 1

1.a. Utilizând datele din tabelul 1, reprezintă grafic dependența de timp a modulului vitezei snowmobilului, când acesta urcă pe pârtie. Marchează pe diagrama $v = v(t)$, porțiunea din grafic ce corespunde mișcării în care Octavian menține constantă forța de tracțiune a motorului snowmobilului, respectiv porțiunea ce corespunde urcării pe pârtie cu motorul oprit.

1.b. Estimează valoarea distanței parcurse de snowmobil în urcare cu motorul oprit.

1.c. Estimează valoarea coeficientului de frecare dintre snowmobil și zăpada de pe pârtie.

1.d. Estimează valoarea forței de tracțiune a snowmobilului, pentru porțiunea de drum pe care această forță a fost menținută constantă.

Sarcina de lucru nr. 2

La câteva minute după ce a ajuns în partea de sus a pârtiei, Octavian începe să coboare cu snowmobilul aceeași pantă. La începutul coborârii, Octavian imprimă snowmobilului viteza $v_0 = 5\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, orientată paralel cu panta și spre baza acesteia, după care coboară pe pârtie, într-o mișcare rectilinie, cu motorul oprit. La bază, pârtia se continuă cu o porțiune plană, orizontală. Ajuns la baza pârtiei, Octavian trece cu snowmobilul, într-un interval de timp foarte scurt, de pe porțiunea înclinată pe porțiunea orizontală a pârtiei, fără ca snowmobilul să se ridice de pe pârtie, sau să se afunde în zăpadă.

2.a. Determină expresia variației totale de impuls pe direcție verticală, apărută la trecerea lui Octavian cu snowmobilul de pe porțiunea înclinată a pârtiei pe porțiunea orizontală.

2.b. Calculează valoarea variației totale de impuls pe direcție verticală, apărută la trecerea lui Octavian cu snowmobilul de pe porțiunea înclinată a pârtiei pe porțiunea orizontală.

Pe pârtie - Soluție

Sarcina de lucru nr. 1

1.a. În figura 1 este prezentată dependența de timp a modulului vitezei snowmobilului, în situația când acesta urcă pe pârtie. Graficul $v = v(t)$ a fost trasat pe baza datelor din tabelul 1.

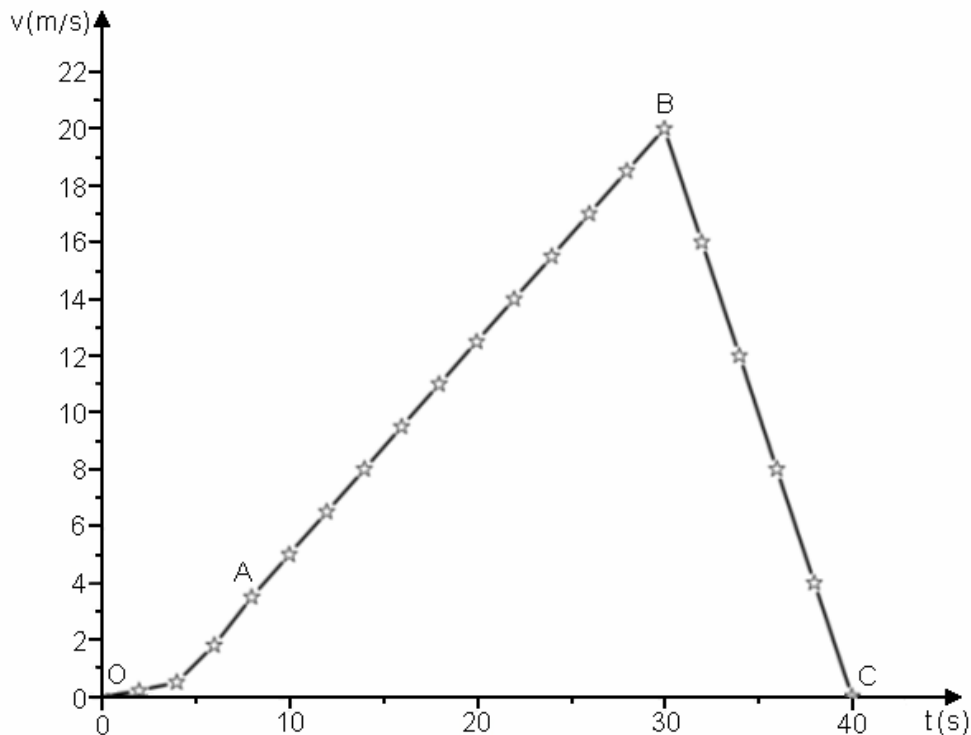


Figura 1

Porțiunea OA din reprezentarea grafică corespunde situației în care accelerația snowmobilului este variabilă.

Pe porțiunea AB a reprezentării grafice din figura 1, viteza crește liniar cu timpul, mișcarea fiind rectilinie uniform accelerată. Prin urmare, porțiunea AB din grafic corespunde situației în care forța de tracțiune a snowmobilului este constantă.

Porțiunea BC din reprezentarea grafică din figura 1 corespunde situației în care mișcarea snowmobilului este rectilinie uniform încetinită, până la oprirea din partea de sus a pârtiei. Această porțiune a graficului corespunde situației în care Octavian a urcat pe pârtie cu snowmobilul având motorul oprit.

Graficul din figura 1 reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.a.

1.b. În reprezentarea grafică din figura 1, distanța parcursă de snowmobil cu motorul oprit are semnificația ariei delimitate de segmentul BC , axa timpului și ordonata corespunzătoare momentului de timp $t_B = 30 \text{ s}$. Valoarea acestei distanțe se poate estima, pe baza datelor din tabelul 1

$$\begin{cases} D = \frac{20 \frac{m}{s} \cdot (40 \text{ s} - 30 \text{ s})}{2} \\ D = 100 \text{ m} \end{cases} \quad (1)$$

Observație: Alte modalități de determinare a acestei distanțe se bazează pe utilizarea ecuației lui Galilei, sau a legii de mișcare rectilinie uniform variată și pe determinarea accelerației de urcare a snowmobilului cu motorul oprit.

Relația (1) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.b.

1.c. Pentru rezolvarea cerințelor din următoarele sarcini de lucru, sistemul fizic analizat cuprinde snowmobilul și pe Octavian și are masa totală $(M + m)$.

Octavian urcă o porțiune de drum cu snowmobilul, având motorul oprit. În această situație, forțele exercitate asupra sistemului sunt: greutatea totală a snowmobilului și a lui Octavian, reacțiunea normală exercitată din partea pârtiei și forța de frecare la alunecare pe zăpadă (figura 2).

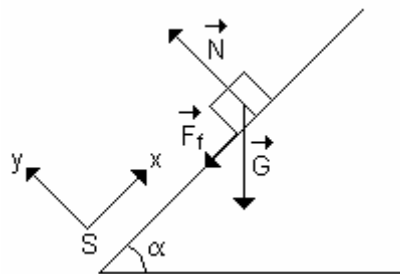


Figura 2

Expresia principiului fundamental al mecanicii, aplicat pentru sistemul menționat este

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}_u \quad (2)$$

Proiectând relația (2) pe axele S_x , respectiv S_y se obține

$$\begin{cases} -(M + m) \cdot g \cdot \sin \alpha - F_f = (M + m) \cdot a_u \\ N - (M + m) \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Mărimea forța de frecare la alunecare are expresia

$$F_f = \mu \cdot N \quad (4)$$

Combinând relațiile (3) și (4) rezultă expresia modulului accelerației de urcare pe pârtie, cu snowmobilul, având motorul oprit

$$a_u = -g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \quad (5)$$

Din relația (5) se obține expresia coeficientului μ de frecare la alunecare a snowmobilului pe zăpadă

$$\mu = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \left(-\frac{a_u}{g} - \sin \alpha \right) \quad (6)$$

Valoarea accelerației a_u poate fi estimată pe baza datelor din tabelul 1

$$a_u = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\begin{cases} a_u = \frac{(0,0 - 20,0) \frac{m}{s}}{(40 - 30) \text{ s}} \\ a_u = -2,0 \frac{m}{s^2} \end{cases} \quad (8)$$

Măsurat în radiani unghiul α are valoarea

$$\alpha = 0,10122 \text{ rad} \cong 0,1 \text{ rad} \quad (9)$$

Valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului α determinate cu calculatorul, sau folosind sugestia din enunț sunt

$$\sin \alpha \cong 0,1 \quad (10)$$

$$\cos \alpha \cong 1 \quad (11)$$

Înlocuind valorile numerice în relația (6) și efectuând calculele se obține valoarea coeficientului de frecare dintre snowmobil și zăpada de pe pârtie

$$\mu = 0,1 \quad (12)$$

Relația (12) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.c.

1.d. Pe porțiunea de drum, în care Octavian a menținut constantă forța de tracțiune a motorului snowmobilului, forțele exercitate asupra sistemul analizat sunt: forța de tracțiune a motorului, greutatea totală, reacțiunea normală exercitată din partea pârtiei și forța de frecare la alunecare pe zăpadă (figura 3). Principiul fundamental al mecanicii, aplicat în condițiile specificate în cadrul acestei sarcini de lucru, are expresia

$$\vec{F}_t + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}_t \quad (13)$$

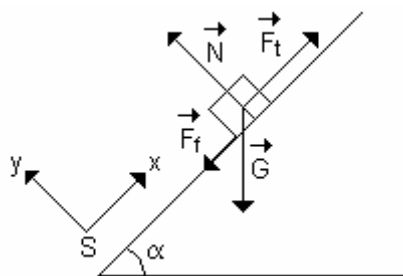


Figura 3

Proiectând relația (13) pe axele S_x , respectiv S_y (figura 3) se obține

$$\begin{cases} F_t - (M + m) \cdot g \cdot \sin \alpha - F_f = (M + m) \cdot a_t \\ N - (M + m) \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Mărimea forța de frecare la alunecare are expresia dată de relația (4).

Combinând relațiile (4) și (14) rezultă

$$F_t = (M + m) \cdot [a_t + g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)] \quad (15)$$

Porțiunea AB a reprezentării grafice din figura 1 corespunde situației în care viteza crește liniar cu timpul și pentru care forța de tracțiune a snowmobilului este constantă. Corelând informațiile din reprezentarea grafică cu datele din tabelul 1 se poate estima valoarea accelerației

$$\begin{cases} a_t = \frac{(20 - 5) \frac{m}{s}}{(30 - 10)s} \\ a_t = 0,75 \frac{m}{s^2} \cong 0,8 \frac{m}{s^2} \end{cases} \quad (16)$$

Înlocuind valorile numerice în relația (15) și efectuând calculele se obține valoarea forței de tracțiune

$$\begin{cases} F_t = 200kg \cdot 2,75 \frac{m}{s^2} \\ F_t = 550 N \end{cases} \quad (17)$$

Relația (17) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.d.

Sarcina de lucru nr. 2

2.a. Diagrama forțelor care acționează asupra sistemului, în situația în care Octavian coboară pe pârtie cu snowmobilul având motorul oprit, este prezentată în figura 4.

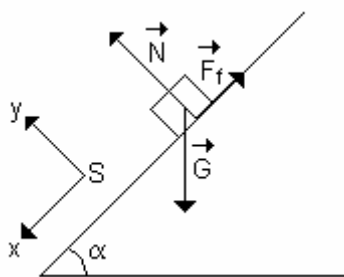


Figura 4

În condițiile specificate în cadrul acestei sarcini de lucru, expresia principiul fundamental al mecanicii este

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}_c \quad (18)$$

Proiectând relația (18) pe axele S_x , respectiv S_y se obține

$$\begin{cases} (M + m) \cdot g \cdot \sin \alpha - F_f = (M + m) \cdot a_c \\ N - (M + m) \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Utilizând relațiile (4) și (19) se obține expresia accelerației de coborâre a snowmobilului, care se deplasează cu motorul oprit.

$$a_c = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \quad (20)$$

Înlocuind valorile numerice în relația (20) și efectuând calculele se obține

$$a_c = 0 \quad (21)$$

Prin urmare, viteza snowmobilului nu se modifică în timpul coborârii; aceasta are o componentă orizontală $v_{o, \text{orizontal}}$ și una verticală $v_{o, \text{vertical}}$. Expresiile modulelor celor două componente ale vitezei sunt

$$\begin{cases} v_{o, \text{orizontal}} = v_o \cdot \cos \alpha \\ v_{o, \text{vertical}} \cong v_o \end{cases} \quad (22)$$

și

$$\begin{cases} v_{o, \text{vertical}} = v_o \cdot \sin \alpha \\ v_{o, \text{vertical}} \cong 0,1 \cdot v_o \end{cases} \quad (23)$$

Imediat înainte ca Octavian să treacă cu snowmobilul de pe porțiunea înclinată pe porțiunea orizontală a părții, impulsul sistemului are expresia

$$\begin{cases} \vec{P} = (M + m) \cdot \vec{v}_o \\ \vec{P} = (M + m) \cdot v_o \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}) \end{cases} \quad (24)$$

unde \vec{i}, \vec{j} sunt respectiv versorii direcțiilor orizontală și verticală.

Imediat după ce Octavian trece – într-un interval foarte scurt de timp - cu snowmobilul de pe porțiunea înclinată pe porțiunea orizontală a părții, componenta pe verticală a vitezei sistemului $v'_{o, \text{vertical}}$ devine nulă, iar componenta pe orizontală rămâne nemodificată ($v'_{o, \text{orizontal}} = v_{o, \text{orizontal}}$).

În această situație, impulsul sistemului are expresia

$$\vec{P}' = (M + m) \cdot v_o \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} \quad (25)$$

Prin urmare, apare o variație a impulsului sistemului

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}' - \vec{P} \quad (26)$$

Substituind relațiile (24) și (25) în relația (26) se obține

$$\Delta \vec{P} = -(M + m) \cdot v_o \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} \quad (27)$$

Conform relației (27), variația totală a impulsului sistemului, apărută la trecerea lui Octavian cu snowmobilul de pe porțiunea înclinată pe porțiunea orizontală a părții este orientată pe direcție verticală și are sensul în sus. Prin urmare

$$\begin{cases} \Delta \vec{P} = \Delta \vec{P}_{vertical} \\ \Delta \vec{P}_{vertical} = -(M + m) \cdot v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} \end{cases} \quad (28)$$

Relația (28) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.a.

2.b. Valoarea variației totale de impuls pe direcție verticală, apărută la trecerea lui Octavian cu snowmobilul de pe porțiunea înclinată a părții pe porțiunea orizontală se determină înlocuind valorile numerice în relația (28) și efectuând calculul

$$\begin{cases} \Delta P_{vertical} = 200 \text{ kg} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,1 \\ \Delta P_{vertical} = 100 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \quad (29)$$

Relația (29) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.b.

© Soluție propusă de:

Dr. Delia DAVIDESCU – Centrul Național de Evaluare și Examinare – M E C T S
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea București